Chương 1

MA TRẬN

1.1. Các khái niệm ma trận

1.1.1. Định nghĩa ma trận

Định nghĩa 1.1. Một ma trận cấp $m \times n$ trên K là một bảng gồm $m \times n$ phần tử trong K được viết thành m dòng và n cột như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong đó $a_{ij} \in K$ là phần tử ở vị trí dòng i, cột j của ma trận A (còn gọi là vị trí i,j). Đôi khi ma trận A được viết ngắn gọi là $A = (a_{ij})$.

Tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ trên K được ký hiệu là $M_{m\times n}(K)$, hay vắn tắt là $M_{m\times n}$.

Ví dụ 1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2x3}(\mathbf{R})$

Với $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$,...

Nếu $m = n$ thì ma trận A có cỡ $m \times n$ được gọi là ma trận vuông cấp n. Khi đó đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính (hay đường chéo) của ma trận A. Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên K được ký hiệu là $M_n(K)$ hay vắn tắt là M_n.

Các ma trận vuông đặc biệt

Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n.

i) Ta nói A là ma trận đường chéo khi $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$, nghĩa là tất cả các phần tử ở bên ngoài đường chéo của A đều bằng 0.

ii) Nếu $a_{ij} = 0, \forall i > j$ (nghĩa là mọi phần tử ở phía dưới đường chéo đều bằng 0) thì A được gọi là ma trận tam giác trên. Nếu $a_{ij} = 0, \forall i < j$ thì A được gọi là ma trận tam giác dưới. Ta gọi chung ma trận tam giác trên hay ma trận tam giác dưới là ma trận tam giác.

iii) Ma trận cấp $m \times n$ mà tất cả đều bằng 0 được gọi là ma trận không, ký hiệu là $O_{m\times n}$ (hay vắn tắt là O).

iv) Ma trận đường chéo cấp n mà tất cả các phần tử trên đường chéo đều là 1 được gọi là ma trận đơn vị, ký hiệu I_n (hay vắn tắt là I).

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 1.2.

Với $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ta có A là ma trận đường chéo, B là ma trận tam giác trên, C là ma trận tam giác dưới.

1.1.2. Ma trận chuyển vị

Định nghĩa 1.2. Cho ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Ta gọi ma trận chuyển vị của A là ma trận A^T, được suy ra từ ma trận A bằng cách đổi hàng thành cột và cột thành hàng trong ma trận A.

Như vậy, $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$.

Ví dụ 1.3.

1) Cho ma trận A $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, khi đó $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2) Cho ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, khi đó $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Tính chất:

i) $(A^T)^T = A$.

ii) $A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$.

iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

1.2. Các phép toán trên các tập ma trận

1.2.1. Sự bằng nhau

Định nghĩa 1.3. Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng kích thước và có các phần tử cùng vị trí bằng nhau.

Như vậy, $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = (a_{ij})_{m\times n};\ B = (b_{ij})_{m\times n} \\ a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j \end{cases}$

Ví dụ 1.4.

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \\ d = -3 \end{cases}$.

1.2.2. Phép cộng

Định nghĩa 1.4. Cho $A, B \in M_{m\times n}(K)$, với $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$. Tổng của hai ma trận A và B được định nghĩa bởi:

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Ví dụ 1.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Tính chất: Với mọi $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$

i) $A + B = B + A$.

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

iii) $A + O = A$.

iv) Nếu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và đặt $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$ thì ta có: $A + (-A) = (-A) + A = O$.

Chú ý: Tổng $A + (-B)$ được viết bởi $A - B$.

1.2.3. Phép nhân một ma trận với một số

Định nghĩa 1.5. Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $\alpha \in K$. Phép nhân α với A được định nghĩa bởi $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

Ví dụ 1.6.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Tính chất: Cho $\alpha, \beta \in K$ và $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Ta có:

i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

1.2.4. Tích của hai ma trận

Định nghĩa 1.6. Cho $A = (a_{ij})_{m\times p}$ và $B = (b_{ij})_{p\times n}$. Tích của hai ma trận *A* và *B*, ký hiệu *AB*, là một ma trận $C = (c_{ij})_{m\times n}$ được xác định bởi:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Chú ý: Phần tử c_{ij} của ma trận tích được tính từ các phần tử ở dòng *i* của *A* và các phần tử cột *j* của *B*. Ta thường nói c_{ij} bằng dòng *i* của *A* nhân với cột *j* của *B*. Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

Ví dụ 1.7.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Khi đó, $AB = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.0 & 1.2 + 2.3 \\ 3.1 + 4.0 & 3.2 + 4.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$;

$BA = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.3 & 1.2 + 2.4 \\ 0.1 + 3.3 & 0.2 + 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$.

2) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-1) + 0.2 + 2.1 & 1.0 + 0.3 + 2.0 \\ 3.(-1) + 4.2 + 1.1 & 3.0 + 4.3 + 1.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Tính chất:

Với *A, B, C* là các ma trận tùy ý (sao cho phép toán có nghĩa) ta có:

i) A(BC) = (AB)C.

ii) 0.A = O.

iii) AI = A ; IB = B.

iv) $A(B \pm C) = AB \pm AC$.

v) $(B \pm C)A = BA \pm CA$.

vi) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \forall \alpha \in K$.

1.3. Đại số Mat_nK các ma trận vuông cấp n

1.3.1. Định thức của tích hai ma trận

Định lý 1.1. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Ví dụ 1.8.

Cho hai ma trận A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ và B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, khi đó $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$.

Đồng thời,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = -6.$$

Như vậy, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Chú ý: Định thức của ma trận vuông A cấp n (n$\geq$ 3) được kí hiệu là det(A) và được tính theo công thức: det(A) = $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det\left(M_{1j}\right)$. Trong đó ma trận M_{1j} là ma trận sinh ra từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng 1 cột j.

1.3.2. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 1.7. Xét $A \in M_n$. Nếu tồn tại ma trận $B \in M_n$ sao cho $AB = BA = I$, thì ta nói ma trận A là khả đảo và B là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu A^{-1}.

Như vậy, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Ví dụ 1.9. Cho ma trận A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Dễ thấy:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

và $BA = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Do đó: $B = A^{-1}$.

Định lý 1.2. Ma trận nghịch đảo A^{-1} của $A \in M_n$ nếu tồn tại thì tồn tại duy nhất.

Chứng minh:

Giả sử B và C là hai ma trận nghịch đảo của A, tức là ta có: $AB=BA=I$ và $AC=CA=I$. Từ $AB = I \Rightarrow C(AB) = CI \Leftrightarrow (CA)B = C \Leftrightarrow IB = C$, hay $B = C$.

Định lý 1.3. Nếu $A \in M_n$ là ma trận khả đảo, tức là nó có nghịch đảo A^{-1} thì $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh:

Từ $AA^{-1}=I$, theo định lý trên ta có:

$\det(AA^{-1}) = \det(I) \Leftrightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Vậy, $\det(A) \neq 0$.